**ЛЕКЦІЯ 5**

**ПОЛІНОМІАЛЬНА ТЕОРЕМА**

Узагальненням формули бінома Ньютона, є формула піднесення до *n*-го степеня суми *х1 +х2 +...+хm..*

**Теорема ( поліноміальна** )

*(х1 +х2 +...+хm.)n* **=***х1х2…х*****,



*де підсумовування поширюється на всі можливі системи невід’ємних цілих значень, які задовольняють умову .*

*Доведення*

Відомо, що *n*-ий степінь суми *х1+х2+...+хm* є добутком *n* співмножників :

*х1+х2+...+хm*

*х1+х2+...+хm*

*...*

*х1+х2+...+хm*.

Для того, щоб знайти цей добуток, потрібно кожний доданок першого множника помножити на кожен доданок другого множника, кожен із знайдених добутків помножити на кожен доданок третього множника і т.д., а потім додати усі знайдені добутки.

Якщо з першого множника ми візьмемо доданок *хі1*, з другого *хі2*, ..., з *n*-го – *хin*, де кожен з індексів *і1, і2, ...,іn* може дорівнювати будь-якому з чисел 1, 2, ..., *m*, то дістанемо такий член добутку *хі1 хі2... хin*(\*).

Очевидно, що кожному члену *хі1хі2,...хin*відповідає розміщення з повтореннями з *m* елементів *х1,х2,...,хm* по n елементів і, навпаки, кожному такому розміщенню відповідає один член (\*). Звідси випливає, що число всіх членів (\*) дорівнює числу різних розміщень з повтореннями з *m* елементів по *n*, тобто *mn*.

Але не всі ці *mn* членів різні. Члени, в кожному з яких *х1*повторюється 1 раз, *х2*повторюється 2 раз, ... , хm повторюється m раз (1+2+...+m= *n* ), є подібними. Кожен такий член відповідає перестановці з повтореннями *хі1, хі2,..., хin*порядку *n*, в якій елементи *х1, х2,..., хm*повторюються відповідно 1, 2, ..., m раз, і навпаки, кожна така перестановка відповідає лише одному з цих подібних членів.

Отже, число всіх подібних членів дорівнює числу різних перестановок з повтореннями порядку *n* = 1+2+...+m , в яких *х1, х2,..., хm*повторюються відповідно 1, 2, ..., m раз, тобто.

Тоді кожен член *х11х22... хmm* , де 1+2+...+m= *n* входить до розкладу *(х1+х2+...+хm )n* з коефіцієнтом .

Звідси слідує, що *(х1 +х2 +...+хm.)n* **=***х1х2…х ,*де підсумовування поширюється на будь-які системи цілих невід’ємних значень 1,2,...,m, які задовольняють умову 1+2+...+m= *n*,що і потрібно було довести*.*

*Теорему доведено.* ■

**Означення**. *Коефіцієнти , з якими члени x11 х22... хm m  входять до розкладу (х1 +х2 +...+хm.)n , називаються поліноміальними.*

*Приклад*

**Принцип включень та виключень**

Нехай *А* і *В* дві скінченні множини. Кількість їх елементів позначається N(*А*) і N(*В*) . Тоді

 **(1)**

Якщо АВ =Ø , тобто А і В не мають спільних елементів, то

**** **(2)**

Дійсно, якщо перелічити всі елементи множини А, а потім множини В, то дістанемо суму N(А)+N(В) **,** але при цьому спільні елементи А і В будем лічити двічі, проте в об’єднання цих множин вони входят один раз. Тому виконується формула (1).

***Приклад***

1. У групі 15 студентів відвідують секцію плавання; 20 секцію легкої атлетики; 5 - беруть участь в обох секціях. Скільки в групі студентів, якщо кожен відвідує принаймні одну з цих секцій?

*Розв’язання*

Нехай А – множина студентів, які відвідують секцію плавання, В – множина студентів, які відвідують секцію легкої атлетики. За умовою задачі **=**15, **=**20.

****–це множина всіх студентів даної групи.

Використовуючи формулу (1), матимемо:

****=15+20-5=30

*Відповідь:* 30 студентів.

За допомогою методу математичної індукції формулу (1) можна узагальнити на випадок n множин :

**Теорема**.

*Для довільних скінченних множин А1, А2, ..., А n  має місце формула :*

*N(Ai)=)-+-…+*(-1)n-1N(A1 A2…An).

Цю формулу називають формулою включень і виключень. Вона має численні застосування в різних галузях математики, зокрема в теорії чисел та теорії ймовірностей.

***Приклад***

**1.** Із 100 студентів 40 знають англійську мову, 35 – німецьку, 28 – французьку. Англійську і німецьку мови знають 12 студентів, англійську і французьку – 7 студентів, німецьку і французьку – 6 студентів. Всі три мови знають 4 студенти. Скільки студентів не знають жодної з цих мов?

*Розв’язання*

Нехай *А* – це множина студентів, які знають англійську мову, *В* – німецьку, *С* – французьку. Тоді *А*- множина студентів, які знають принаймні одну з цих мов.

Тоді матимемо: *N(A = N(A)+N(B)+N(C)-N(A∩В)-N(A∩С)-N(B∩С) +N(A∩В∩С)*=40+35+28-12-7-6+4=82

Отже, принаймні одну з мов знають 82 студенти. Тоді жодної з цих мов не знають 100- 82= 18 студентів.

*Відповідь:* 18 студентів.